De verraderlijke vijver

Vraag 1: Ja, dit is mogelijk. Op het eerste zicht lijkt dit niet te lukken, want stel dat Tobias in één rechte lijn naar het punt op de oever zwemt, waardoor Wiske de helft van de omtrek van de vijver moet afleggen. Dan is de afstand die Tobias aflegt r en de afstand die Wiske aflegt $r\pi$. Deze afstanden moeten een verhouding hebben die kleiner is dan ¼ omdat Tobias vier keer trager is dan Wiske. Wat niet het geval is, waardoor Wiske sneller op deze plaats zal zijn.

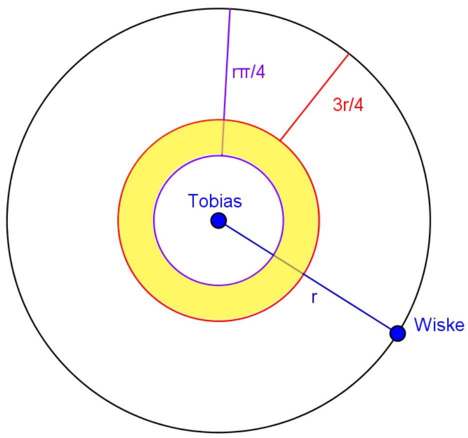
Tobias zal zo nooit eerder zijn dan Wiske. Hij zal dus op een totaal andere manier moeten zwemmen. Om deze te bepalen houden we ons aan twee voorwaarden. Elk van deze voorwaarden stelt een zone voor. Wanneer we deze twee voorwaarden samenbrengen zal er een overlapping zijn van deze twee zones, die een zone vormt waarin Tobias er in zal slagen sneller aan de oever te geraken dan Wiske.

Voorwaarde 1: Tobias moet zich op een afstand van minder dan $r\pi/4$van de oever bevinden, omdat hij dan eerder aan de oever is, als Wiske nog de halve omtrek van de vijver moet afleggen.
Voorwaarde 2: Om voorwaarde 1 mogelijk te maken, moet Tobias m.a.w. de afstand tussen hem en Wiske, voordat hij rechtstreeks naar de oever vertrekt, zo groot mogelijk maken. Dit is wanneer Tobias, het middelpunt van de vijver en Wiske op één rechte lijn liggen.
Hij zwemt echter vier keer trager. Als hij de afstand wil vergroten moet hij dus in cirkels zwemmen die minstens vier keer kleiner zijn dan de vijver. Dan zal de hoeksnelheid van hem groter zijn dan die van Wiske, waardoor de afstand tussen hen vergroot.

Als we deze twee voorwaarden samennemen vinden we een gebied waarin Tobias kan zwemmen met een grotere hoeksnelheid en waaruit hij kan vertrekken zodat Wiske de helft van de omtrek van de vijver moet afleggen.

In de tekening hiernaast is in het geel het gebied aangeduid waaruit Tobias kan vertrekken: namelijk als hij }3r/4,rπ/4{ verwijderd is van de oever.

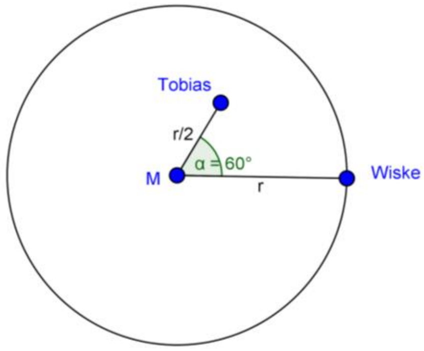
(op een afstand van 3/4r van de oever zwemt Tobias in een cirkel die juist 4 keer kleiner is dan die van Wiske. Hij zal dus geen afstand kunnen vergroten.
Bij rπ/4 zal Tobias, als hij deze afstand nog moet afleggen, gelijktijdig met Wiske aan de oever aankomen)



Tobias zal dus eerst tot in deze zone zwemmen. Dan zal hij hier in cirkels (met als middelpunt het middelpunt van de vijver) rond blijven draaien, totdat: Tobias, het middelpunt van de vijver en Wiske op één rechte lijn liggen. Op dat moment moet Tobias vertrekken naar de oever, zodat Wiske de halve omtrek van de vijver moet afleggen.

Vraag 2: Om onze berekeningen te vereenvoudigen zetten we onze poolcoördinaten om naar cartesiaanse coördinaten. Het middelpunt van de vijver is de oorsprong, de rechte die door de oorsprong en het beginpunt van Wiske gaat, is de x-as en de rechte loodrecht hierop door de oorsprong is de y-as. We werken trouwens met een orthonormaal assenstelsel.

poolcoördinaten van Tobias $(\frac{r}{2}, \frac{\pi}{3})$ → cartesiaanse coördinaten T (x,y)



<u>Berekening:</u>

x-coördinaat:

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{x}{\frac{r}{2}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2x}{r}$$

$$\frac{r}{4} = x$$

dus T $(\frac{r}{4}, \frac{\sqrt{3}r}{4})$

y-coördinaat:

$$sin\frac{\pi}{3} = \frac{y}{\frac{r}{2}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2y}{r}$$

$$\frac{\sqrt{3}r}{4} = y$$

W (r, 0)

Een punt P waar Tobias en Wiske gelijk zullen aankomen: P $(x, \sqrt{r^2 - x^2})$
De y-waarde van P vonden we door de x in te vullen in het voorschrift van de cirkel.
Aangezien wiske 2 keer zo snel zwemt als Tobias, moet de afstand die Wiske aflegt dubbel zo groot zijn.
Dus: $2|TP| = |WP|$

Met behulp van de afstandsformule $[|AB|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]$ vinden we de mogelijke x-waarde(s) van P:

$$2\sqrt{(x-\frac{r}{4})^2 + (\sqrt{r^2-x^2} - \frac{\sqrt{3}}{4}r)^2} = \sqrt{(x-r)^2 + (\sqrt{r^2-x^2} - 0)^2}$$

$$\pm\frac{1}{2}r = x$$

Er zijn dus 2 mogelijke x-waarden waarvoor Tobias en Wiske gelijktijdig aan de oever aankomen. De y-coördinaat bekomen we door de x-coördinaat in de vergelijking van de cirkel in te vullen. We bekomen: P1$(\frac{-1}{2}r, \frac{\sqrt{3}}{2}r)$ en P2$(\frac{1}{2}r, \frac{\sqrt{3}}{2}r)$

Als we kijken naar het punt P1$(\frac{-1}{2}r, \frac{\sqrt{3}}{2}r)$ dan zijn de afstanden tot Tobias en Wiske respectievelijk $\frac{\sqrt{3}}{2}r$ en $\sqrt{3}r$. Als we echter kijken naar het andere punt, P2$(\frac{1}{2}r, \frac{\sqrt{3}}{2}r)$ dan zien we dat de afstanden r/2 en r zijn. Daar zwemmen Tobias en Wiske dus langs de kortste weg en dat is daarom ook de juiste oplossing.

Als we dit omzetten naar poolcoördinaten dan bekomen we P(r,π/3).