

# WISKUNNEND WISKE

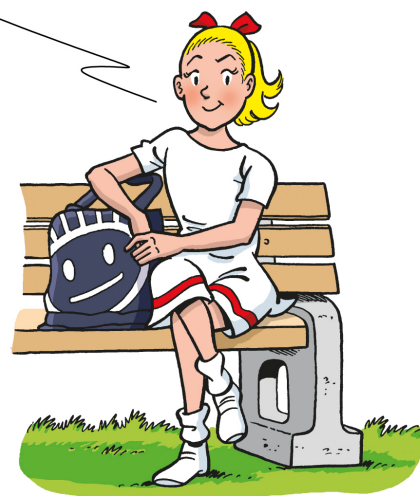
## 1. HET WEELDERIG WOORDENBOEK

Een beroemd uitgever is van plan om een woordenboek te maken waarin alle woorden staan die elk van de 26 letters van het alfabet juist 1 keer gebruiken. De woorden zullen uiteraard alfabetisch gerangschikt worden en het werk zal in 7 volumes verschijnen met elk evenveel woorden.

Zo zal het eerste woord van het eerste volume **abcdefghijklmnopqrstuvwxy** zijn.

Het tweede woord zal **abcdefghijklmnopqrstuvwxy** zijn.

Wat ik ga studeren?  
Wiskunde natuurlijk!



### OPDRACHT:

WAT ZAL HET LAATSTE WOORD VAN HET EERSTE VOLUME ZIJN? EN BEWIJS DIT.

#### Waar wiskundigen vandaag hun hoofd over breken

We hebben hier een belangrijk voorbeeld van een orderrelatie. Neem twee woorden  $\omega_1$  en  $\omega_2$  uit ons woordenboek. Als  $\omega_1$  alfabetisch voor  $\omega_2$  komt of  $\omega_1 = \omega_2$ , noteren wij  $\omega_1 \leq \omega_2$ . De relatie  $\leq$  voldoet aan volgende eigenschappen. Voor elk woord  $\omega$  geldt duidelijk dat  $\omega \leq \omega$ . Telkens  $\omega_1 \leq \omega_2$  en  $\omega_2 \leq \omega_1$  volgt dat  $\omega_1 = \omega_2$ . Ook hebben we dat  $\omega_1 \leq \omega_2$  en  $\omega_2 \leq \omega_3$  opleveren dat  $\omega_1 \leq \omega_3$ . Deze eigenschappen heten respectievelijk de **reflexiviteit**, **antisymmetrie** en de **transitiviteit** van de relatie. Een **orderrelatie** is een relatie die reflexief, antisymmetrisch en transitief is.

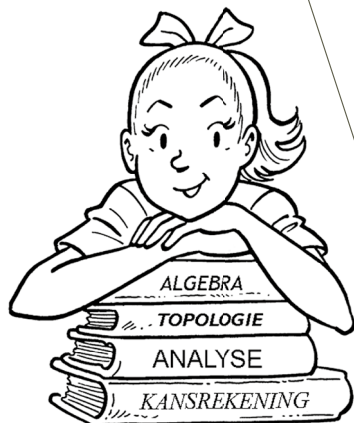
De alfabetische ordening van woorden heeft bovendien nog de eigenschap dat we voor elke twee woorden kunnen zeggen welk woord voor het andere komt. We spreken van een **totale orde**.

Een interessant probleem is het zoeken van een totale orde die compatibel is met een gegeven orderrelatie: gegeven een (niet noodzakelijk totale) orderrelatie  $\leq$ , zoeken we een totale orde  $\leq$  zodanig dat  $a \leq b$  telkens  $a \leq b$ .

Dit kan toegepast worden bij de bouw van een woning bijvoorbeeld. Hierbij komt heel wat kijken: een bouwgrond aankopen, een ontwerp maken met een architect, bouwbedrijven contacteren, een fundering laten bouwen, water en elektriciteit installeren, materialen kiezen, schilderen, ... Het is duidelijk dat die taken niet kunnen uitgevoerd worden in willekeurige volgorde. Zo moet de fundering eerst worden gegoten vooraleer je de muren en het dak kan bouwen. Als je alleen bent voor de bouw van een huis moet je elk van die taken zelf doen, en is het belangrijk dat je een planning kan opstellen om de taken in de juiste volgorde uit te voeren.

Dit probleem komt neer op het vinden van een totale orde die compatibel is met de gegeven orderrelatie op de taken.

Kahn bewees in 1962 dat het voor elke zogenaamde acyclische orderrelatie mogelijk is een totale orde te construeren die hiermee compatibel is. Dit is een mooi theoretisch resultaat maar het efficiënt vinden van zulke totale orde is geen eenvoudig probleem. Hierrond gebeurt nog steeds intensief onderzoek.



Vrije  
Universiteit  
Brussel