Wiskunnend Wiske

Opdracht 1: Woordenboek

KA Zelzate
Onteigeningsstraat 41B
9060 Zelzate
6EW-LW

Oplossing opdracht 1:

De oplossing van de eerste opdracht is het woord:

DSWOECZYXVUTRQPNMLKJIHGFBA

Bewijs:

We hebben 26 letters in ons alfabet. Deze kunnen op 26! (26 faculteit) manieren gecombineerd worden. Dus, per woordenboek, hebben we $\frac{26!}{7}$ woorden per woordenboek en we zoeken dus woord met nummer $\frac{26!}{7}$ in de geordende lijst.

De werkwijze waarop de volgorde van de letters komen is altijd dezelfde. In de geordende lijst, begint woord 1 met een 'a'. Er zijn exact 25! woorden die met een 'a' beginnen, analoog voor 'b', 'c', etc.

Als we nu $\frac{26!}{7}$ delen door 25! dan hebben we als resultaat $\frac{26}{7}$ of meer dan 3. Dit houdt in dat er zeker 3 keer 25! gaat in $\frac{26!}{7}$, maar geen 4 keer, dus dat onze eerste letter de 4de letter is van het alfabet dat nog over blijft, in dit geval het gehele alfabet, abc...xyz, dus **D**.

De tweede stap is om nu $\frac{26!}{7}-3.25!$ te berekenen. Dan weten we welk nummer we zoeken in de geordende lijst, beginnend met een 'd'. Nu hebben we nog 25 letters over, waarbij de woorden van 25 letters eerst beginnen met een 'a'. Daarvan zijn er exact 24!, analoog voor alle andere 24 letters. Als we nu $\frac{26!}{7}-3.25!$ delen door 24! komen we weer een rationaal getal uit ($\frac{125}{7}=17,...$), waarbij de cijfers voor de komma aangeven hoeveel keer we 24! moeten in mindering brengen bij $\frac{26!}{7}-3.25!$ om een nieuw nummer te verkrijgen in de nieuwe lijst, en dit cijfer '+1' de plaats waar we de, in dit geval 2e letter moeten zoeken. Nu zoeken we de 17e letter van het overgebleven alfabet, of de 18 van het originele alfabet, aangezien de 'd' reeds weg is, blijft over abcefghijkl..., waarbij de 'e' de 4e letter, 'f' de 5e etc. . De 17e letter is dan de **S.**

Door deze rekenwijze continu te blijven doorzetten vinden we het uiteindelijke woord.

Voor de derde letter wordt $\frac{26!}{7}-3.25!-17.24!$ gedeeld door 23! ($\frac{144}{7}=20,...$), dus de 21ste uit de overblijvende lijst letters, of de 23 uit het originele alfabet aangezien nu reeds de D en de S weg zijn, dus de derde letter is de **'W'.**

Voor de vierde letter wordt dit dan : $\frac{26!}{7}-3.25!-17.24!-20.23!$ delen door 22!, dus $\frac{92}{7}=13,...$, dus de 14e letter uit het resterende alfabet, dus de **'O'.**

Voor de vijfde letter wordt het dan $\frac{26!}{7}-3.25!-17.24!-20.23!-13.22!$, delen door 21! geeft $\frac{22}{7}=3,...$, dus de 4e letter zijnde de **'E'**.

Echter, wanneer de deling exact een natuurlijk getal is, dan nemen we, in plaats van dit getal + 1 te doen om de plaats van de letter te vinden, de letter op de plaats van de waarde van het getal. Daarna zijn alle andere letters het resterende alfabet in omgekeerde volgorde. Aangezien de deling nu exact uitkomt betekend dit dat het woord dat we zoeken het laatste is dat met deze letter begint.

Dit komen we tegen als we verder doen, nl. $\frac{26!}{7}-3.25!-17.24!-20.23!-13.22!-3.21!$ delen door 20! levert exact 3 op, en dus de letter **'C'**. Binnen de woordenlijst van resterende mogelijkheden, beginnend met deze 'C' moeten we nu het allerlaatste woord zoeken. Dit gebeurt door de resterende overgebleven letters in omgekeerd alfabetische volgorde te zetten, zodat het woord dat hierop volgt met de 'F' begint (aangezien D en E er al voor staan).

Het gevonden woord is dus:

DSWOECZYXVUTRQPNMLKJIHGFBA