

Wiskunnend Wiske Opgave 2

Onze-Lieve-Vrouw-Van-Lourdescollege Edegem
6 WeWi8-GriWi8-LaWi8

28 november 2016

Notatie

We zullen naar Suske, tante Sidonia en Lambik resp. met de noemer S, T en L verwijzen. We noemen a_i de tijd van persoon A in de i^{de} kamp. De totale tijd van persoon A noemen we $S(A)$. Hier betekent dat dat $S(A) = \sum_{i=1}^{18} a_i$. De totale tijd van een ploeg met de personen A, B, ..., Z noemen we $S(A, B, \dots, Z) = \sum_{i=1}^{18} \min(a_i, b_i, \dots, z_i)$

Oplossing

We moeten de minimale tijd vinden die S, T en L behaald moeten hebben. We weten dat geen van hun totale tijden minder dan of gelijk aan 72 kan zijn, anders zou Wiske niet gewonnen hebben. Dus weten we sowieso al dat $S(S), S(T), S(L) > 72$. We kunnen alle totale tijden minder dan 73 al uitsluiten. We gaan nu bewijzen dat het echte minimum ~~73~~ is door te bewijzen dat 73 ~~en~~ ~~73~~ niet kunnen. Dan geven we een voorbeeld dat werkt voor ~~73~~ ~~74~~ ~~74~~ ~~74~~

Bewijs dat 73 niet werkt

Stel zonder verlies van algemeenheid dat $S(S) = 73$ (veronderstelling 1). Veronderstel dat $\forall i \in \{1, 2, \dots, 18\} : t_i, l_i \geq s_i$ (veronderstelling 2). Dan volgt dat

$$\begin{aligned} \forall i \in \{1, 2, \dots, 18\} : s_i &= \min(s_i, l_i, t_i) \\ \implies \sum_{i=1}^{18} s_i &= \sum_{i=1}^{18} \min(s_i, l_i, t_i) \implies S(S, T, L) = S(S) = 73 \end{aligned}$$

Wiske verliest van S, T en L samen dus is $73 < 72$. Dit is echter een contradictie en dus is veronderstelling 2 fout.

We weten dus dat $\exists n \in \{1, 2, \dots, 18\} : t_n < s_n$ of $l_n < s_n$. Stel nu z.v.v.a. dat $t_n < s_n$, dan

$$\begin{aligned} \implies \min(t_n, s_n) &= t_n < s_n \implies \sum_{i=1}^{18} \min(s_i, t_i) < \sum_{i=1}^{18} s_i \\ \implies S(S, T) < 73 &\implies S(S, T) \leq 72 \end{aligned}$$

Maar dan zou Wiske niet van meer van Suske en tante Sidonia samen hebben gewonnen. Dit is een contradictie en dus is ook veronderstelling 1 fout. Niemand van S, T, en L kan een totale tijd van 73 hebben.

Bewijs dat 74 niet werkt

Bewijzen dat $S(S) = 74$ niet kan werken is al een beetje lastiger, maar uiteindelijk valt ook dat nog mee. Laten we eerst z.v.v.a. veronderstellen dat $S(S) = 74$ (veronderstelling 1). We weten dat $S(S, T) > 72$. Stel nu $\exists n \in \{1, 2, \dots, 18\} : t_n < s_n$. Stel dat er nog een $p \neq n$ bestaat zodat $t_p < s_p$ (veronderstelling 2). Dan zou

$$\begin{aligned} t_p &\leq s_p - 1 \wedge t_n \leq s_n - 1 \\ \implies \min(t_p, s_p) &\leq s_p - 1 \wedge \min(t_n, s_n) \leq s_n - 1 \\ \implies \min(t_p, s_p) + \min(t_n, s_n) &\leq s_p + s_n - 2 \\ \implies \sum_{i=1}^{18} \min(t_i, s_i) &\leq \sum_{i=1}^{18} s_i - 2 \implies S(T, S) \leq 72 \end{aligned}$$

Dit is echter een contradictie, want dan zouden S en T samen van Wiske winnen, en ondermijnt het dus veronderstelling 2. Er bestaat dus hoogstens één n zodat $t_n < s_n$.

Stel nu dat $t_n < s_n - 1$ (veronderstelling 3). Dan zou

$$\begin{aligned} \min(t_n, s_n) &< s_n - 1 \implies \sum_{i=1}^{18} \min(t_i, s_i) < \sum_{i=1}^{18} s_i - 1 \\ \implies S(S, T) &< 73 \implies S(S, T) \leq 72 \end{aligned}$$

Dit is ook een contradictie omdat Wiske van S en T samen zou winnen. Veronderstelling 3 is dus ook fout. Er bestaat dus hoogstens één n zodat $t_n < s_n$ en dan zou ook $t_n = s_n - 1$.

Analoog bestaat er hoogstens één m zodat $l_m < s_m$ en dan zou ook $l_m = s_m - 1$. Daaruit volgt dat $\exists m, n \in \{1, 2, \dots, 18\} : \min(s_n, t_n, l_n) \geq s_n - 1 \wedge \min(s_m, t_m, l_m) \geq s_m - 1 \wedge \forall i \in \{1, 2, \dots, 18\} \setminus \{m, n\} : \min(s_i, l_i, t_i) = s_i$

$$\implies \sum_{i=1}^{18} \min(s_i, l_i, t_i) \geq \sum_{i=1}^{18} s_i - 2 \implies S(S, T, L) \geq 72$$

Wiske verliest van S, T en L samen, dus is dit een contradictie en kan veronderstelling 1 niet waar zijn. Niemand van S, T en L kan als totale tijd 74 hebben.

Voorbeeld voor ~~75~~ 74

Stel we nemen de volgende uitstlag.

$$\begin{array}{cccccccc} s_5 = 3 & s_6 = 4 & s_1 = 5 & s_2 = 5 & s_3 = 5 & s_4 = 4 & s_7 = \dots = s_{18} = 4 \\ t_5 = 4 & t_6 = 4 & t_1 = 5 & t_2 = 5 & t_3 = 5 & t_4 = 3 & t_7 = \dots = t_{18} = 4 \\ l_5 = 4 & l_6 = 3 & l_1 = 5 & l_2 = 5 & l_3 = 5 & l_4 = 4 & l_7 = \dots = l_{18} = 4 \end{array}$$

Dan is $S(S) = S(T) = S(L) = 74 > 72$, $S(S, T) = S(T, L) = S(L, S) = 73 > 72$ en $S(S, T, L) = 72$. Dus is dit een voorbeeld waar er aan de voorwaarden wordt voldaan en S, T en L elk een tijd hebben van ~~74~~ 74.

Dit is geen contradictie. Als $S(S, T, L) = 72$ zal Wiske ook niet winnen (maar gelijk spelen).

Conclusie

De minimale totale tijd die elk van Wiskes vrienden moet gehaald hebben is ~~75~~ 74.