

# Het stampvolle stadion

## Opgave

Je hebt een ticket voor een volledig uitverkochte atletiekwedstrijd met 50000 plaatsen en iedere supporter in het stadion heeft een ticket met stoelnummer. De eerste man die de tribune opkomt is zijn stoelnummer echter kwijt en gaat op een willekeurige stoel zitten. Daarna komen alle andere supporters één voor één binnen. Als hun eigen stoel nog vrij is, dan gaan ze daar natuurlijk zitten. Is hun stoel echter al bezet door iemand anders, dan nemen ook zij een willekeurige stoel. Jij komt als laatste binnen. Wat is de kans dat je op jouw eigen stoel kan gaan zitten?

## Oplossing

We zullen per inductie op het aantal supporters (en het aantal stoelen) bewijzen dat de kans dat je op je eigen stoel gaat zitten  $\frac{1}{2}$  is.

Stel dat er exact 2 supporters en 2 stoelen zijn. Enkel als de eerste supporter zijn eigen stoel kiest, kan je op jouw eigen stoel gaan zitten. De eerste supporter heeft keuze uit 2 stoelen, dus de kans dat hij op zijn eigen stoel gaat zitten is  $\frac{1}{2}$ .

Inductiehypothese: Als het aantal supporters (en stoelen) strikt kleiner is dan 50000, en de supporters gaan zitten zoals hierboven beschreven, dan is de kans dat je op je eigen stoel kan gaan zitten gelijk aan  $\frac{1}{2}$ .

Laat ons de de situatie met 50000 supporters bekijken en nummer elke supporter in de volgorde waarin ze het stadion binnen komen. Supporter  $i$  wordt verondersteld op stoel  $i$  te gaan zitten. Stel dat supporter 1 gaat zitten op stoel  $k$ , dan onderscheiden we 3 gevallen.

1. Als  $k = 1$ , dan gaat supporter 1 op zijn eigen stoel zitten en bijgevolg gaat elke supporter na hem op zijn eigen stoel zitten. De kans dat je op je eigen stoel terecht komt is dus 1.
2. Als  $k = 50000$ , dan gaat supporter 1 op jouw stoel zitten en kan je dus niet meer op je eigen stoel terecht. De kans is 0.
3. Als  $1 < k < 50000$ , dan zullen supporters 2 tot en met  $k - 1$  op hun eigen stoel gaan zitten. Supporter  $k$  moet dan wel willekeurig gaan zitten. We kunnen in onze veronderstelling supporter 2 tot en met  $k - 1$  weglaten en door hernummering aannemen dat supporter  $k$  de tweede supporter is van de  $50000 - (k - 2) < 50000$ . Hier kunnen we de inductiehypothese toepassen en verkrijgen we dat de laatste supporter met een kans van  $\frac{1}{2}$  op zijn eigen stoel kan plaatsnemen.

Elk van deze 50000 situaties komt voor met een waarschijnlijkheid van  $\frac{1}{50000}$ . Als we  $p_k$  definiëren als

$$p_k = \begin{cases} 1 & k = 1 \\ 0 & k = 50000 \\ \frac{1}{2} & 1 < k < 50000 \end{cases}$$

dan kunnen we de kansen combineren als

$$\sum_{k=1}^{50000} \frac{1}{50000} p_k = \frac{1}{50000} \cdot 1 + \sum_{k=2}^{49999} \frac{1}{50000} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{50000} \cdot 0 = \sum_{k=1}^{50000} \frac{1}{50000} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

De kans dat je op je eigen stoel kan plaatsnemen is dus  $\frac{1}{2}$ .