W^3 Scholarship Challenge 2018

22 april 2018

De *Catalan getallen*, genoemd naar de Belgische wiskundige *Eugène Charles Catalan* (1814 - 1894) maar ontdekt en bestudeerd door Leonhard Euler (1707 - 1783), zijn gedefinieerd als

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}, \qquad n \geq 0,$$

waarbij voor $n \leq m$ we met

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

de binomiaalcoëfficiënten voorstellen. We nemen hierbij als conventie dat $0! = 1$.

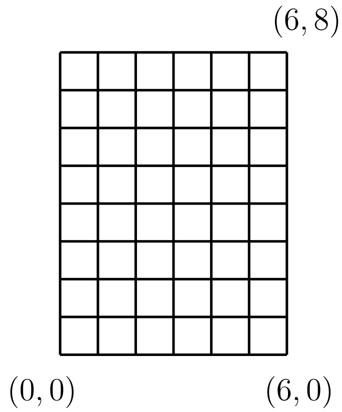
De Catalan getallen komen in veel takken van de wiskunde op verrassende wijze tevoorschijn. In deze vraag zullen we enkele van de aspecten van Catalan getallen beschouwen.

1. Toon aan dat

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}.$$

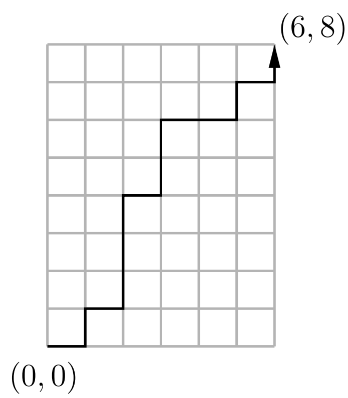
   Besluit in het bijzonder dat C_n een natuurlijk getal is voor elke $n \in \mathbb{N}$.

2. Beschouw voor $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ een rooster $R_{m,n}$ van m bij n:



Figuur 1: een 6×8 rooster

We noemen een *(stijgend linksonder naar rechtsboven) pad in* $R_{m,n}$ een collectie punten (x_k, y_k) met $0 \leq x_k \leq m$ en $0 \leq y_k \leq n$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $x_{k+1} - x_k \in \{0, 1\}$, $y_{k+1} - y_k \in \{0, 1\}$ en $x_{k+1} - x_k \neq y_{k+1} - y_k$ en waarbij het laatste punt (m, n) is. Figuur 2 toont



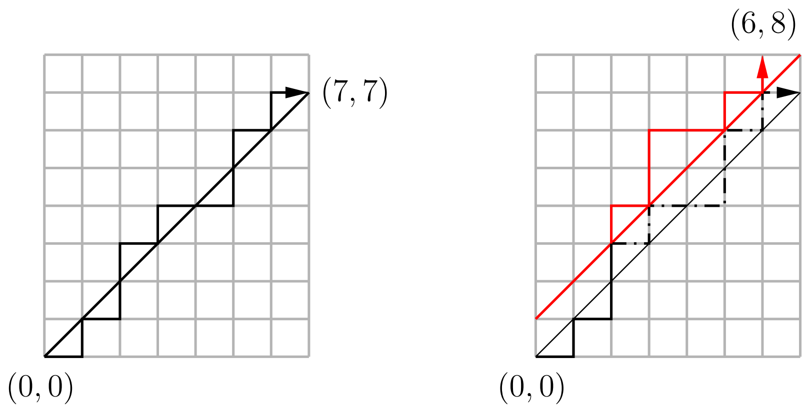
Figuur 2: Een stijgend pad in een 6×8 rooster

een stijgend pad in een 6×8 rooster. Dit pad verbindt de punten $\{(0,0), (1,0), (1,1), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,4), (3,5), (3,6), (4,6), (5,6), (5,7), (6,7), (6,8)\}$ en correspondeert met de rij bewegingen RBRBB-BRBBRRBRB, met 'R' een beweging naar rechts, en 'B' een beweging naar boven.

Met andere woorden, een pad reist van $(0,0)$ naar (m,n) via de twee operaties R (ga één stap naar rechts) en B (ga één stap naar boven).

(a) Toon aan dat het aantal dergelijke paden in een m-bij-n-rooster gelijk is aan de binomiaalcoëfficiënt $\binom{n+m}{m}$.

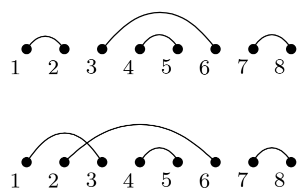
(b) Noem een pad in een n-bij-n-rooster *niet toegelaten* als het de diagonaal overschrijdt: er bestaat een punt (x_k, y_k) op het pad met $y_k > x_k$. Toon aan dat er een bijectief verband is tussen niet-toegelaten paden in een n-bij-n rooster en *alle* paden in een $(n-1)$-bij-$(n+1)$-rooster. Baseer je hierbij op de volgende figuur.



Figuur 3: Links: een niet toegelaten pad in een 7×7 rooster, rechts: door een "spiegeloperatie" omgezet in een pad in een 6×8 rooster

(c) Noem een pad in een n-bij-n-rooster *toegelaten* als het nooit de diagonaal overschrijdt. Besluit uit het voorgaande dat C_n het aantal toegelaten paden is in een n-bij-n-rooster.

3. Noem een *niet-kruisende paar-partitie* van $2n$ een partitie in koppels van $\{1, 2, \ldots, 2n-1, 2n\}$ zó dat er geen koppels $(a, b), (c, d)$ bestaan met $a < c < b < d$:



Figuur 4: Boven: een niet-kruisende paar-partitie, onder: een kruisende paar-partitie

De niet-kruisende paar-partitie in Figuur 4 is de verzameling koppels $\{1, 2\}$, $\{3, 6\}$, $\{4, 5\}$ en $\{7, 8\}$. De kruisende paar partitie is de verzameling koppels $\{1, 3\}$, $\{2, 6\}$, $\{4, 5\}$ en $\{7, 8\}$.

Toon aan dat er een bijectief verband bestaat tussen niet-kruisende paar-partities van $\{1, 2, \ldots, 2n-1, 2n\}$ en toegelaten paden in een n-bij-n-rooster. Besluit dat C_n ook het aantal niet-kruisende paar-partities telt op een verzameling van $2n$ punten.

4. Leid uit het voorgaande de volgende recurrentiebetrekking af voor Catalan-getallen:

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$$

Hierbij is $C_0 := 1$.