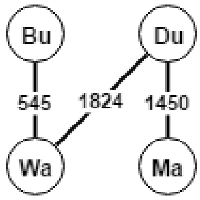
Koninklijk Atheneum Tervuren
Datum: 16 november 2015

Klas: 6 Ecwi + 6 Lawi + 6 Wewi

Naam leerkracht: A. Verschueren

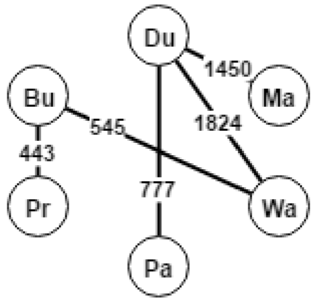
Wiskunnend Wiske Opdracht 2

a) Het efficiëntste vliegplan om Budapest, Dublin, Madrid en Warschau te verbinden is door vluchten tussen volgende luchthavens in te leggen: Budapest-Warschau, Warschau-Dublin en Dublin-Madrid (voorgesteld door graaf 1). Hierdoor kunnen passagiers overal geraken terwijl het aantal vluchten (3) en de totale vliegafstand (3819 km) minimaal zijn.

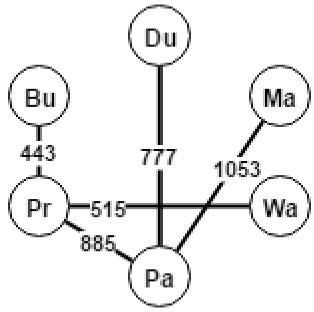


Graaf 1

Om de luchthavens van Parijs en Praag toe te voegen aan dit bestaande plan moeten er verbindingen ingelegd worden tussen Parijs-Dublin en Praag-Budapest. Het bekomen vliegplan bestaat uit 5 vluchten en een totale vliegafstand van 5039 km (graaf 2). Indien het bestaande vliegplan mag worden aangepast bestaat het efficiëntste vliegplan uit vluchten tussen Dublin-Parijs, Madrid-Parijs, Parijs-Praag, Praag-Warschau en Praag-Budapest. Dit plan bestaat ook uit 5 vluchten maar de totale vliegafstand is hierbij slechts 3673 km (graaf 3).



Graaf 2



Graaf 3

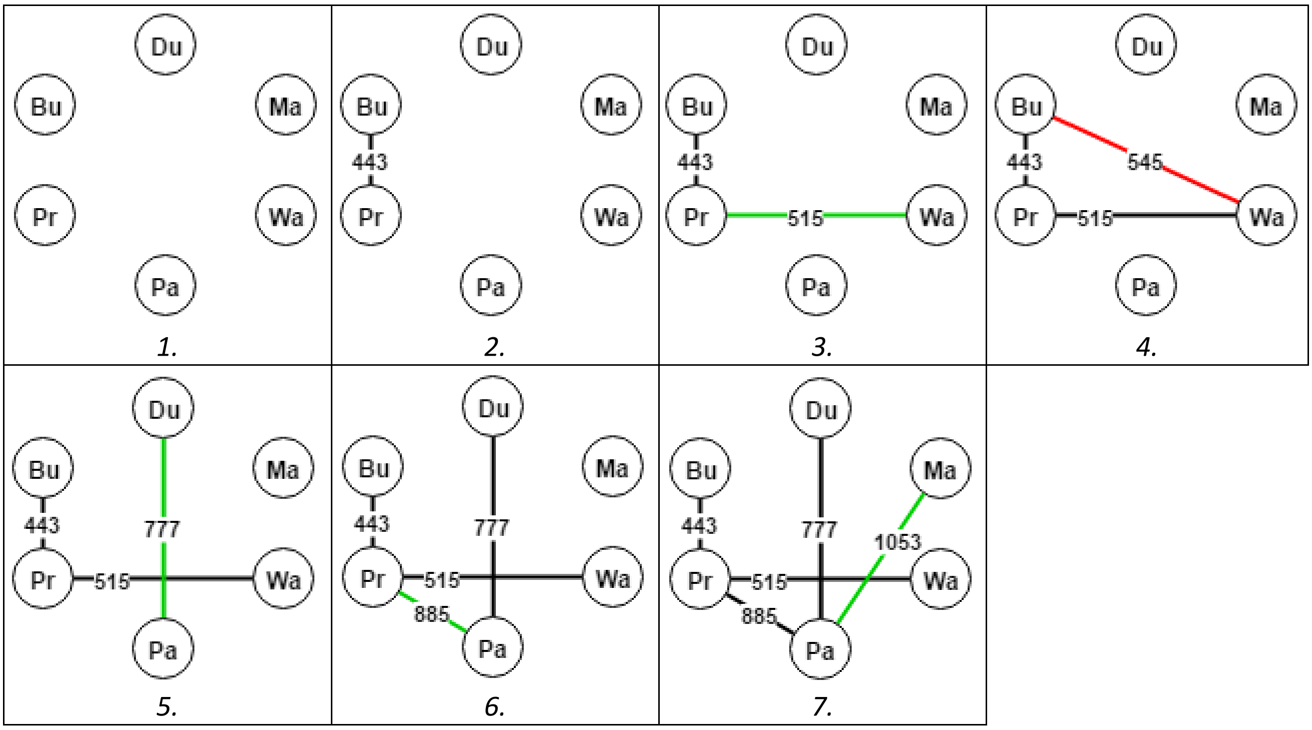
b) Het netwerk van alle mogelijke verbindingen kan abstracter voorgesteld worden door een volledige gewogen graaf waarvan elke knoop een luchthaven voorstelt en de afstand tussen 2 luchthavens wordt voorgesteld door het gewicht van de kant tussen die twee knopen. Van deze graaf moet dan de minimaal opspannende boom worden gezocht, dit is de verbonden subgraaf met het kleinste gewicht. Deze boom komt overeen met een efficiënt vliegplan: zo weinig mogelijk vluchten/kanten en een zo klein mogelijke totale vliegafstand/totaal gewicht. Een belangrijke eigenschap van een minimaal opspannende boom is dat deze subgraaf geen cykels bevat. Een cykel is een pad dat begint en eindigt in dezelfde knoop en minstens 3 knopen bevat. Een manier om de minimaal opspannende boom te vinden is deze:

1) Teken de te verbinden luchthavens voorgesteld door knopen.
2) Zoek de kortste vlucht en teken deze door de twee corresponderende knopen te verbinden.
3) Zoek de volgende kortste vlucht.
4) Kijk of deze vlucht ervoor zou zorgen dat er een cykel ontstaat in de graaf.
5) Is dit het geval, ga dan terug naar stap 3. Zo niet, voeg deze vlucht dan toe aan de graaf.
6) Zijn alle luchthavens verbonden(/is het aantal vluchten gelijk aan het aantal luchthavens-1)? Zo ja, dan is de minimaal opspannende boom gevonden en dus ook het efficiënt vliegplan. Is dit nog niet het geval ga dan naar stap 3.

Voorbeeld van het stappenplan bij het opstellen van het vliegplan uit vraag a (de bijbehorende grafen staan op het einde):

1. Luchthavens voorstellen door knopen.
2. De kortste vlucht is tussen Praag en Budapest (443 km).
3. De volgende kortste vlucht is tussen Praag en Warschau (515 km), in de graaf levert dit geen cykels op.
4. De vlucht tussen Warschau en Budapest is de volgende kortste vlucht (545 km) maar indien men deze tekent in de graaf ontstaan er cykels (o.a. Praag-Warschau-Budapest-Praag), deze vlucht wordt dus niet toegevoegd.

5. De volgende kortste vlucht is die tussen Parijs en Dublin (777 km), door deze vlucht toe te voegen ontstaan er geen cykels dus deze vlucht wordt wel toegevoegd.
6. De volgende vlucht is die tussen Parijs en Praag (885 km), ook deze vormt geen cykels en wordt toegevoegd.
7. De laatste vlucht is die tussen Parijs en Madrid (1053 km) ook hier ontstaan geen cykels en vermits alle luchthavens met elkaar zijn verbonden is het eindresultaat het meest efficiënte vliegplan.



(Dit is een toepassing van het algoritme van Kruskal, bron: *Grafen in de praktijk – Hajo Broersma p. 30*)

c) Stelling 1: Een efficiënt vliegplan voor N luchthavens bestaat uit N-1 vluchten.
Bewijs: Omdat een efficiënt vliegplan overeenkomt met de minimaal opspannende boom van een graaf volstaat het om te bewijzen dat een boom met N knopen steeds uit N-1 kanten bestaat:
Stelling 2: Een boom met N knopen heeft steeds N-1 kanten. Bewijs door volledige inductie:
   1. Een boom met slechts 1 knoop heeft geen kanten. De stelling is dus waar voor 1 knoop.
   2. Om aan een boom met k knopen en k-1 kanten een knoop toe te voegen moet de nieuwe knoop verbonden worden met de bestaande graaf door middel van precies 1 kant. Als er geen extra kant wordt toegevoegd is de bekomen graaf niet meer samenhangend en dus ook geen boom meer. Indien de knoop door middel van 2 of meer kanten wordt verbonden ontstaan er cykels en is de bekomen graaf ook geen boom meer. De nieuwe boom heeft dus k+1 knopen en k kanten. Als de stelling klopt voor een boom met k knopen geldt hij dus ook voor een boom met k+1 knopen.
   3. Uit 1 volgt dat de stelling waar is voor 1 knoop, uit 2 volgt dus dat de stelling waar is voor 2 knopen. Daaruit volgt volgens 2 dat de stelling ook waar is voor 3 knopen enz….
   Stelling 2 is dus waar (want een boom heeft minstens 1 knoop).

Vermits stelling 2 waar is, is stelling 1 ook waar. Een efficiënt vliegplan voor N luchthavens heeft dus N-1 vluchten.